Лекция 13. Производная сложной и неявной заданной функции. Производная по направлению. Касательная плоскость и нормаль.

§ 1. Производная сложной функции. Полная производная

Пусть $z = f(x;y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t);y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t переменные x и y — промежуточные переменные.

Теорема 5. Если $z = f(x;y)$ — дифференцируемая в точке $M(x;y) \in D$ функция $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z(t) = f(x(t);y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (44.8)$$

Дадим независимой переменной t приращение Δt. Тогда функции $x = = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции z.

Так как по условию функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Разделим выражение

Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ в силу непрерывности функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (по условию теоремы — они дифференцируемые).

Получаем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \beta \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Частный случай: $z = f(x;y)$, где $y = y(x)$, т. е. $z = f(x;y(x))$ — сложная функция одной независимой переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x. Согласно формуле (44.8) имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ или } \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}} \qquad (44.9)$$

Формула (44.9) носит название формулы *полной производной*.

Общий случай: $z = f(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$. Тогда $z = f(x(u;v);y(u;v))$ — сложная функция независимых переменных u и v. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу (44.8) следующим образом. Зафиксировав v, заменяем в ней $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}} \tag{44.10}$$

Аналогично получаем: $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$.

Таким образом, производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (u и v) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (x и y) на их производные по соответствующей независимой переменной (u и v).

Пример 44.5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \text{In}(x^2 + y^2)$, $x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение: Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}$ ($\frac{\partial z}{\partial v}$ — самостоятельно), используя формулу (44.10):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \cdot v + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y \cdot \frac{1}{v}$$

Упростим правую часть полученного равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{x^2 + y^2}\left(x \cdot y + \frac{y}{v}\right) = \frac{2}{(uv)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \cdot \left(uv \cdot v + \frac{u}{v \cdot v}\right) =$$

$$= \frac{2v^2}{u^2\left(v^4 + 1\right)} \cdot \frac{u \cdot \left(v^4 + 1\right)}{v^2} = \frac{2}{u},$$

т.е. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{u}$.

§ 2. Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно показать, что полный дифференциал обладает свойством инвариантности: полный дифференциал функции $z = f(x;y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пусть $z = f(x;y)$), где x и y — независимые переменные. Тогда полный дифференциал (1-го порядка) функции имеет вид $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ (формула (44.5)).

Рассмотрим сложную функцию $z = f(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;\ v)$, т.е. функцию $z = f(x(u;v);y(u;v)) = F(u;v)$, где u и v — независимые переменные. Тогда имеем:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right).$$

Выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы dx и dy функций $x = x(u;v)$ и $y = y\ (u;\ v)$. Следовательно, и в этом случае,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$